Topologia
Lista 4 (ciągłość funkcji)

Zad 1. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, która jest ciągła tylko w jednym punkcie.

Zad 2. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, ciągłej tylko w liczbach niewymiernych.

Zad 3. Niech (X, d_X), (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Wykazać, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest

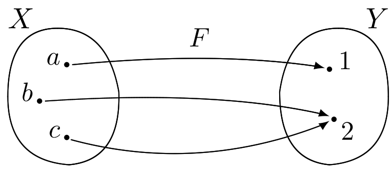
a) ciągłe w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla kazdego otwartego otoczenia V punktu $f(x_0)$ istnieje otwarte otoczenie U punktu x_0 takie, że $U \subset f^{-1}(V)$.

b) ciągłe w każdym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego $V \subset Y$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty.

Zad 4. Korzystając z topologicznej definicji ciagłości, sprawdzić ciagłość następujących funkcji na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, [1] c) $f(x) = x^2$, d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. [2]

Zad 5. Niech $Y = \{1, 2\}$ będzie wyposażony w topologię dyskretną. Niech F będzie funkcją daną przez diagram



Wyznaczyć wszystkie topologię na $X = \{a, b, c\}$, dla których F jest odwzorowaniem ciągłym.

Zad 6. Wyznaczyć wszystkie odwzorowania ciągłe $f : X \to Y$, gdy a) X jest wyposażony w topologię dyskretną, b) Y jest wyposażony w topologię antydyskretną.

Zad 7. Pokazać, że zbiór punktów stałych ciągłego odwzorowania $f : X \to X$ przestrzeni Hausdorffa X jest zbiorem domkniętym.

Zad 8. Udowodnić, że superpozycja funkcji ciągłych jest funkcją ciagłą; ponadto, jeżeli (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) są przestrzeniami topologicznymi, funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła w punkcie $x \in X$, a funkcja $g : Y \to Z$ jest ciągła w punkcie $f(x) \in Y$, to funkcja $f \circ g : X \to Z$ jest ciągła w punkcie x.

Zad 9. Niech (X, τ_X), (Y, τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi. Wykazać, że ciągłość odwzorowania $f : X \to Y$ jest równoważna każdemu z następujących warunków

a) $f^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym dla każdego $U \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest bazą topologii τ_Y,

b) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego $A \subset X$,

c) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ dla każdego $B \subset Y$,

d) $f^{-1}(\mathrm{Int}\,(B)) \subset \mathrm{Int}\,(f^{-1}(B))$ dla każdego $B \subset Y$.

Zad 10. Niech X i Y będa przestrzeniami topologicznymi oraz niech $\{G_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni X. Udowodnić, że jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcją taką, że $f : G_t \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym dla każdego $t \in G_t$, to $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym.

Zad 11. Niech X i Y będa przestrzeniami topologicznymi oraz niech $\{F_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ będzie domkniętym pokryciem przestrzeni X. Udowodnić, że jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcją taką, że $f : F_t \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym dla każdego $t \in F_t$, to $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym.

---

[1] $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ jest tak zwaną *częścią całkowitą* liczby x; inne nazwy: *cecha, entier, podłoga*

[2] $x - \lfloor x \rfloor$ jest *częścią ułamkową* (*mantysą*) liczby x